1995年6月　　陕西师大学报(哲学社会科学版)　　Jun.,1995
第24卷 第2期　　Journal of Shaanxi Normal University (Social Science)　　Vol.24 No.2

中国古代数理音律的发展

朱恩宽　李武华　冯德民

摘　要　中国古代数理音律形成和发展有四个阶段:均钟之律、三分损益律、纯律和十二平均律。古人以音乐实践为基础,以数理原理为依据,发明了沿用至今的各种成熟的律制,为人类音律史作出了卓越的贡献。

关键词　均钟之律　三分损益律　纯律　十二平均律

一、均钟之律

中国乐器中的陶埙,有约7000年的历史,青铜编钟的制作亦在3000年前,这些乐器表现为何种律制,又有哪些数学内涵,是我们首先要探讨的。

据《国语·周语下》记载:景王将铸无射,问律于伶州鸠,对曰:"纪之以三,平之以六,成于十二"。又于曾侯乙编钟上层二三组钮钟(无射宫)见铭文如下:

合编号	一	二	三	四	五	六	下略
隧部铭文	宫	商	宫角	商角	宫曾	商曾	
鼓部铭文	徵宫	羽宫	徵	羽	徵角	羽角	

两相对照,即知是将"三分损益"的宫、商、徵、羽四音各分为三律,即:宫曾——宫——宫角;商曾——商——商角;徵曾——徵——徵角;羽曾——羽——羽角。再按钟的大小顺序,将六律铸于隧部,六吕铸于鼓部,以完成十二律。据编钟测音的结果:所谓"角"、"曾"均为此音上、下之纯律大三度。古代虽系"以耳齐其声",但此处已有明确的数学内涵,设宫为1,列出各律与之长度的比:

宫	羽角	商	徵曾	宫角	羽曾	商角	徵	宫曾	羽	商曾	徵角
1	$\frac{128}{135}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{80}{108}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{8}{15}$

此律在中国民间音乐中流传数千年,至今不衰。唐代前后传入日本,对日本民间音乐有很大的影响。中、日音乐中的四级音(fa)及古律中吕徵高之现象,即源于此。

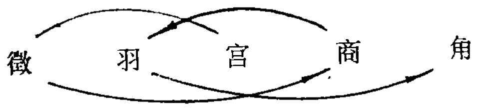
二、三分损益律

这一律学理论的记载最早是在《管子·地员》中,提出了产生五音(即宫、商、角、徵、羽)的三分损益法。

收稿日期:1994—03—01

把一个弦长均分为三段，舍去三分之一，取其三分之二，称为“三分损一”；在原弦上加三分之一，成为三分之四，称为“三分益一”，这样产生各律，不同的弦长产生不同的音高，各律产生如下：

现设宫长（指弦长）为 81，那么，$81\times\frac{4}{3}=108$ 得徵长；$108\times\frac{2}{3}=72$ 得商长；$72\times\frac{4}{3}=96$ 得羽长；$96\times\frac{2}{3}=64$ 得角长。各音产生如下图：



说明：均钟之律在徵、羽、宫和商上再各上下产生纯律大三度而得。

上行（向右）产生纯五度，下行（向左）产生相对的纯四度。

之后，有《吕氏春秋·季夏纪》（公元前 249～237 年）中所述：“黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕，三分所生益之一分以上生；三分生所去其一分以下生”。① 现依此计算如下：

相生次序	1	8	3	10	5	12	7	2	9	4	11	6
律　名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
各律长与黄钟长之比数	1	$\frac{2\,048}{2\,187}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16\,384}{19\,683}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{131\,672}{177\,147}$	$\frac{512}{724}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4\,096}{6\,561}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32\,768}{59\,049}$	$\frac{128}{243}$

三分损益律的发明是音乐实践与数学的第一次结合，是律学史上的一次飞跃。此种律制适用于单音音乐，所奏之旋律富于流动感，历时 2 000 余年一直沿用至今。

由于一音的上行纯五度音与它的下行纯四度音是八度转值，因而上述律制如同从一音开始向上产生一个纯五度音，即产生次一律，由此律再向上产生一个纯五度音，又生一律，如此继续产生各律，所以此律也叫五度相生律。

这样，我们取 m 使弦长满足$\frac{1}{2}<(\frac{2}{3})^k\cdot 2^m<1$（k＝1，2，…，12，m 为正整数），就可以从弦长为 1 的第一律产生在一个八度内的各律。

汉代京房（公元前 77 年～前 37 年）又以数学方法计算出：十二律之后若再生一律，其律较短，不能还于第一律黄律；若直生下去，则第 54 律与黄钟近似。此后又生满七声，与黄钟宫对比。史称：“京房六十律”。

《后汉书·律历志》云：“相生也，皆三分而损益之。是故十二律之，得十七万七千一百四十七，是为黄钟之实。又以二乘而三约之，是为下生林钟之实。又以四乘而三约之，是为上生太簇

① 依此所算之数，于《史记·律书》的“律数”、“生钟分”中有载。

之实。推此上下，以定六十律之实。以九三之数万九千六百八十三为法，律为寸。”

京房为了计算精确，用了一个大数；又为符合黄钟九寸之传统，用了一个小数。上文之意为：相生时，无论损益皆须三分，为了得数成整数，十二律须以 $3^{11}=177\ 147$ 为黄钟（被除数）。三分损益算出六十律后，又以 $3^{9}=19\ 683$ 除之。成为律之寸数。

又云：“黄钟，十七万七千一百四十七，律九寸。色育，十七万六千七百七十六，律八寸九分小分八微强。执始，十七万四千七百六十二，律八寸八分小分七大强。……”（六十律悉有详数，略）。

自黄钟生至第十三律“执始”，为 8.8788294 寸，短于黄钟。至第五十四律“色育”，为 8.9811512 寸，与黄钟极近，可以约等。故而发现了：相生 53 律后可周而复始。此一发现开创了“53 平均律”（〔比〕Gerardus Mercatos，1512～1594 年）及“53 纯律”（〔日〕田中正平 Tanaka Shohei，1862～1945 年）之先河。三者相比：京房之法最简，误差又小。故于现代研制纯律、五度相生律的电子乐器，为较佳之理论选择。①

三、纯　律

有关纯律之理论，最早见于《晋书·律历志》（公元 644～646 年）中荀勖之夷则笛注：“体用四角，故四分益一也。”意即夷则笛的体长用其角音黄钟的四倍，9 寸（黄钟）×4＝36 寸，此笛之体长与夷则宫孔的联系为“四分益一”，即 36 寸$\times\frac{5}{4}=45$ 寸为笛体之全长，所用之宫孔必为其半律（高八度音），即 22.5 寸，为夷则宫音之孔距。

从原书所列之笛长来看，所用均为十二正律，今亦依此算出各音孔之长度：

角	变微	微	羽	变宫	宫	商
（黄钟）	（太簇）	（夷则）	（仲吕）	（林钟）	（夷则）	（无射）
体长	第五孔	第四孔	第三孔	第二孔	第一孔	后出孔
3.6 尺	3.2 尺	2.9968 尺	2.6626 尺	2.4 尺	2.2476 尺	1.9976 尺

依以上各孔之长度计算：变宫——微；变微——商；这些大三度之间亦均约等于“四分益一”，即 2.4 尺（变宫）$\times\frac{5}{4}=3$ 尺（微）；3.2 尺（变微）$\times\frac{5}{4}\div2=2$ 尺（商），故“四分益一”亦可能系泛指各律，故夷则宫与中国之雅乐音阶及日本之“吕旋”极为近似。

另外，我国古代所用音阶，其四级音为变微（#fa），若按其“下微调”以夹钟为宫，则恰成为一条现代所用之纯律音阶：

	宫		商		角		清		微		羽		变		少
	夹钟		中吕		林钟		角夷则		无射		黄钟		宫太簇		宫夹钟
音分差		204		180		114		204		180		204		114	
		大全音		小全音		大半音		大全音		小全音		大全音		大半音	

角一宫之间为“四分益一”的现象，在夹（仲）②、夷、无各笛中均有，荀勖独注于夷则笛下，

① 见《自控转调三律电子键盘乐器》说明书，中国专利申请号 90100726.9。日本特许源平 3—18899。

② 《晋书》所记，独缺仲吕一篇。但从理论上讲，中吕亦属此类。

必知此笛之音高为纯正。

夷则笛律若按所注之“四分益一”来计算，即与“均钟之律”暗合：

夷则宫	宫	商	角	变徵	徵	羽	变宫
钟律名	宫	商	宫角	商角	徵	羽	徵角
长度比	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{15}$

从而亦可得中华律制之传承及前文演算之有据。

《晋书》所记为：“泰始十年”（公元 274 年），故以数学方式表现纯律者，应以荀勖为最早。

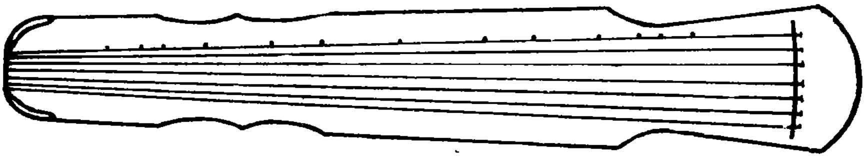
有关纯律之实践，以古琴为最明显。

在南北朝时，梁朝的丘明（公元 494 年～590 年）所传的古代七弦琴琴谱《碣石调幽兰谱》中，在 13 个徽位上广泛应用了泛音，这就产生了纯律的音程。①

七弦琴上弦长于 1/2，1/3，1/4，1/5，1/6，1/8 等处两边均设琴徽，共计 13，如下图。

徽位序数		13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
徽的位置	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
可发纯律之音		自然七度的转位	小三度	大三度	纯四度	纯五度	大六度	八度	大十度（三度）	纯十二度（五度）	八度	大三度	纯五度	八度

在任何一条弦上，准确按在第 3，6，8，11，12 等徽位上，就能分别发出此律大三度、小三度和大六度的音程，这就证明了纯律的全部音阶的实际存在。



唐“九霄环佩”古琴

四、十二平均律

三分损益法生律 11 次后得到$(\frac{2}{3})^{11}\cdot 2^{6}$，若再生一律得$(\frac{2}{3})^{12}\cdot 2^{7}=0.98654$，不能回到出发律 1 上，使十二律不能周而复始，也不能实现“旋相为宫”，为此中国历代律学研究者从两个方面进行研究：一是继续生律，使其回到出发律上；另一方面是在十二律上作适当的调整以达到目的。

前已述汉代京房将律生至 60。在公元 438 年前后，还有人把律生到 360 律，以解决周而复始问题。

① 缪天瑞：《律学》。

我们知道，要以三分损益法使之回到出发律是不可能的。因为 2 与 3 互素，于是不存在 m，n>1，使得 $\frac{2^n}{3^m}=1$，即不存在两正整数 s，t，使得 $(\frac{2}{3})^s\cdot 2^t=1$。

南北朝的何承天（公元 370 年～447 年）创造了一种新律，他以始律黄钟的弦长为 9，那么，以三分损益法生到 12 次，弦长就是 $9\times(\frac{2}{3})^{12}\times 2^7=9\times 0.98654\doteq 8.88$ 它比黄钟短 0.12，于是他把 0.01，0.02，……0.12 分别加到所产生的十二个律的弦长上，这样就产生了新的十二个律。这是用平差的办法加以处理的，虽然已使第十三律回到出发律上，然而此律不是由频率比（或弦长比）产生，谈不上周而复始，也更谈不上“旋相为宫”，但他的这种算术处理，仍然有一定的理论意义。实际上，何承天的各律对应于十二平均各律的音分值之差仅有一律偏大为 15.1 音分，其余都小于 10 音分，有 6 个音差小于 3.61 音分，尽管如此，它也没有什么实用价值。

以后还有人在十二律上作变通工作，但都远离频率比生律的基本原理。

明朝朱载堉（公元 1536 年～1610 年?）在前人研究的基础上，通过音乐实践，以及利用当时先进计算工具——珠算和开方术，作了大量的计算，解决了音律周而复始的问题，发明了十二平均律。

朱载堉在《律吕精义内篇》中，对于如何生律作了详细的阐述。他将首律黄钟正律长取为 1（弦长），首先算出蕤宾倍律为

$\sqrt{1^2+1^2}\doteq\sqrt{2}\doteq 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689=\alpha$

（蕤宾倍律 α 是 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值，有 25 个有效数字）

再计算出南吕倍律，即

$\sqrt{1\times\alpha}=\sqrt{\alpha}\doteq 1.189\,207\,115\,002\,721\,066\,717\,500=\beta$

（南吕倍律 β 是 $\sqrt[4]{2}$ 的过剩近似值，有 25 个有效数字）

然后计算出应钟倍律，即

$\sqrt[3]{1\times 1\times\beta}=\sqrt[3]{\beta}\doteq 1.059\,463\,094\,359\,295\,264\,561\,825=\gamma$

（应钟培律 γ 是 $2^{\frac{1}{12}}$ 的不足近似值，有 25 个有效数字）

于是以黄钟为始，而以应钟 γ 为终的十二律就可以依下法求得，即黄钟正律长，用应钟倍律 γ 除之，得次一律。次一律再除以应钟倍律 γ，得再下律，这样一直算出各律。

设黄钟正律 C=1，

$C/\gamma\doteq 0.943\,874\,312\,681\,693\,496\,641\,913={}^{\#}C$ 为大吕正律。

$^{\#}C/\gamma\doteq 0.890\,898\,718\,140\,339\,304\,740\,226=d$ 为太簇正律。

$d/\gamma\doteq 0.840\,896\,415\,253\,714\,543\,031\,125={}^{\#}d$ 为夹钟正律。

$^{\#}d/\gamma\doteq 0.793\,700\,525\,984\,099\,737\,375\,853=e$ 为姑洗正律。

$e/\gamma\doteq 0.749\,153\,538\,438\,340\,749\,399\,640=f$ 为仲吕正律。

$f/\gamma\doteq 0.707\,106\,781\,186\,547\,524\,400\,844={}^{\#}f$ 为蕤宾正律。

$^{\#}f/\gamma\doteq 0.667\,419\,927\,085\,017\,182\,415\,416=g$ 为林钟正律。

$g/\gamma\doteq 0.629\,960\,524\,947\,436\,582\,383\,605={}^{\#}g$ 为夷则正律。

$^{\#}g/\gamma\doteq 0.594\,603\,557\,501\,360\,533\,358\,750=a$ 为南吕正律。

$a/\gamma\doteq 0.561\,231\,024\,154\,686\,490\,716\,766={}^{\#}a$ 为无射正律。

$^{\#}a/\gamma \doteq 0.529\ 731\ 547\ 179\ 647\ 632\ 280\ 912 = b$ 为应钟正律。

$b/\gamma \doteq 0.500\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = \frac{1}{2}C$ 是清黄钟。

从计算得知，"可终而复始，循环无端"，由此达到了回到出发律的目的。

朱载堉对律学、数学和天文历法都有着深入的研究，他所著的《算学新说》，写的就是开平方术和开立方术。正是有了先进的算法和利用当时先进的计算工具——算盘，才使他的音律研究有了质的飞跃。他所著的《乐律全书》，包括《律学新说》、《乐学新说》、《算学新说》、《律吕精义内・外篇》以及乐谱、舞谱等共 15 部，概括了音乐、舞蹈以及与此有关的研究。他在《律学新说》中，用 81 档的珠算，计算出了十二个律的正律，除黄钟正律外，每律都算到有 24 个数字。

我们用计算机核实了这些数字，它们都是所求数的近似值，且都有 24 个有效数字，从理论上讲，若是以 $2^{-\frac{1}{12}}$为公比的等比数列，那么必有$(2^{-\frac{1}{12}})^{12} = \frac{1}{2}$。而朱载堉是以 γ^{-1}为公比而得到了各律，因而$(\gamma^{-1})^{12} \neq \frac{1}{2}$。而事实上，朱载堉从应钟正律到清黄钟各律的计算，实为符合近似要求的结果。

"朱载堉设计的弦准，第一个采用十二平均弦律的数据"，"朱载堉使用算盘开平方、开立方，计算成果之精度空前"，① 从计算得知，"可终而复始"，这实际是近似计算的偶合。当然，在实用上，如此高精度的近似值能满足任何一种利用十二平均律的仪器（包括电子乐器）的需要，他的算法理论应该说奠定了十二平均律的基础，说朱载堉发明了十二平均律是完全正确的。一但人们认识了无理数 $\sqrt{2}$ 和 $2^{\frac{1}{12}}$，那么依据朱载堉的算法，就很容易得到十二平均律的最终理论的意义，朱载堉依他对音乐艺术等方面的研究和贡献，而成为世界音律史上伟大的科学家。

〔**作者简介**〕 朱恩宽，1936 年生。陕西师范大学数学系副教授。发表数学教育、数学史和音律方面文章多篇，主编《初等几何教程》，合译《欧几里得几何原本》等书。 李武华，1931 年生。西安音乐学院音乐研究所副教授，中国律学学会理事，发表有《关于亚非美各洲民间音律的一种学说》等文章多篇。 冯德民，1949 年生，陕西师范大学计算机系副教授，发表有《关于内分类算法分析的讨论》、《汽车整公里表的设计》等论文多篇，参编《IBM PC 汇编语言》等书。

〔**责任编辑　王　晖**〕

① 冯文慈：《简评"朱载堉纪念大会"中的"函告"》，《音乐研究》1994 年第 3 期。